

问题57 方格中填入数字有几种填法(改编自2021清华大学领军计划丘班数学测试)

 邱福星
  2021-03-03
  65次阅读



手机扫码看答案

六年级

五年级

四年级

计数

难度: ★★★★★

枚举法

罗宾斯数

加乘原理

试题PDF下载



详解PDF下载

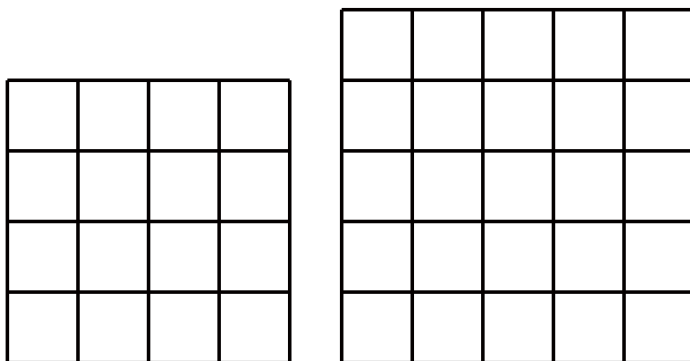


在方格中填入数字，要求：①只能填入1或2；②每行每列都至少填入一个数；③每一行或每一列的数字均为1、2、1、2、1、... (1和2交替出现，且2不能出现在首尾)。

(1)如果放入 4×4 的方格中有多少种方法？

(2)如果放入 5×5 的方格中有多少种方法？

(不可以翻转或旋转)【北京雨朦改编】



 解析

显然，2不能出现在最边上，每一行或每一列只能是1、121、12121、...，中间可以空。

(1)我们按照2的数量来分类：

①0个2：4个1放入 4×4 的方格中，每行每列放1个，由乘法原理易得有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 种。

②1个2：2只能放入中间的 2×2 的方格中， A 、 B 中放入1个1， C 、 D 中放入1个1，另外2的位置可以交换，有 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 种。

	1		
1	2	C	D
	A		
	B		

③2个2：显然只有2种.

	1		
1	2	1	
	1	2	1
		1	

综上所述，一共有 $24 + 16 + 2 = 42$ 种.

(2)依然按照2的数量来分类：

①0个2：5个1放入 5×5 的方格中，每行每列放1个，由乘法原理易得有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 种.

②1个2：2所在的行和列是对称的，考虑行. 若 $B = 2$ 或 $D = 2$ ，这一行的121有 $1 \times 3 = 3$ 种，若 $C = 2$ ，这一行的121有 $2 \times 2 = 4$ 种，2所在的行列填完后，还剩下两行两列，两个1有2种填法，共有 $(3 + 3 + 4)^2 \times 2 = 200$ 种.

A	B	C	D	E

	1			
1	2	1		
	1			

③2个2：共6大类，有 $4 \times 0 + 2 \times 3 + 4 \times 8 + 2 \times 4 + 8 \times 4 + 4 \times 4 = 94$ 种.

2		
2		

2		
		2

	2	
2		

2		2
2		
		2
2		
	2	

④3个2：共3大类，有 $4 \times 2 + 4 \times 1 + 2 \times 1 = 14$ 种.

	2	
2		2

	2	
2		
		2

2		
	2	
		2

⑤4个2：1种.

	2	
2		2
	2	

综上所述，一共有 $120 + 200 + 94 + 14 + 1 = 429$ 种.

📌 2021清华大学领军计划第3题

已知矩阵 X 满足条件：①元素都属于集合 $0, 1, -1$ ；②每行每列不全为0；③去掉0元素后每行每列都为 $1, -1, 1, -1, \dots, -1, 1$. 三阶这样的矩阵 X 有7个，问四阶这样的矩阵 X 共有几个？

【答案】42

【解析】若矩阵 X 不含元素 -1 ，则每一行每一列都仅含有一个元素1，矩阵 X 共 $4! = 24$ 个；若矩阵 X 含有元素 -1 ，则 -1 必然在矩阵 X 的一个 2×2 子矩阵中

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & a & b & \square \\ \square & c & d & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

若 $a = -1$ ，则矩阵 X 共有5个

$$\begin{bmatrix} \square & 1 & \square & \square \\ 1 & -1 & \square & 1 \\ \square & \square & 1 & \square \\ \square & 1 & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \square & 1 & \square & \square \\ 1 & -1 & \square & 1 \\ \square & 1 & \square & \square \\ \square & \square & 1 & \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \square & 1 & \square & \square \\ 1 & -1 & 1 & \square \\ \square & \square & \square & 1 \\ \square & 1 & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \square & 1 & \square & \square \\ 1 & -1 & 1 & \square \\ \square & 1 & \square & \square \\ \square & \square & \square & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \square & 1 & \square & \square \\ 1 & -1 & 1 & \square \\ \square & 1 & -1 & 1 \\ \square & \square & 1 & \square \end{bmatrix}$$

同理可得，当 $b = -1$ 或 $c = -1$ 或 $d = -1$ ，矩阵 X 都共有5个，考虑 $a = -1$ 与 $d = -1$ 的情况有一个矩阵重复计算， $b = -1$ 与 $c = -1$ 有一个矩阵重复计算，因此当矩阵 X 含有元素 -1 ，一共有 $4 \times 5 - 2 = 18$ 个。

综上所述，四阶矩阵 X 一共有 $24 + 18 = 42$ 个。



罗宾斯数(Robbins numbers)

Robbins numbers: $a(n) = \text{Product}_{k=0..n-1} (3k+1)!/(n+k)!$; also the number of descending plane partitions whose parts do not exceed n ; also the number of $n \times n$ alternating sign matrices (ASM's).
前几个数为1, 1, 2, 7, 42, 429, 7436, 218348, 10850216, 911835460, 129534272700, 31095744852375

- 作者：邱福星
- 版权：部分题目来自网络，如有侵权，请联系删除

留言区



昵称

必填

邮箱

必填

网址

选填

本站支持上传图片，Latex公式，使用QQ邮箱可以显示头像，欢迎做题！



预览

发送

0 条评论



没有评论

Powered by [Twikoo](#) v1.2.0

🇨🇳 Copyright © 2020-2021 Designed by QiuFuxing

本站总访问量21628次

鄂ICP备2020019603号-1