

勾股定理及其证明

邱福星 2021-06-15 259次阅读

六年级

五年级

几何

难度: ★★★

勾股定理

证明



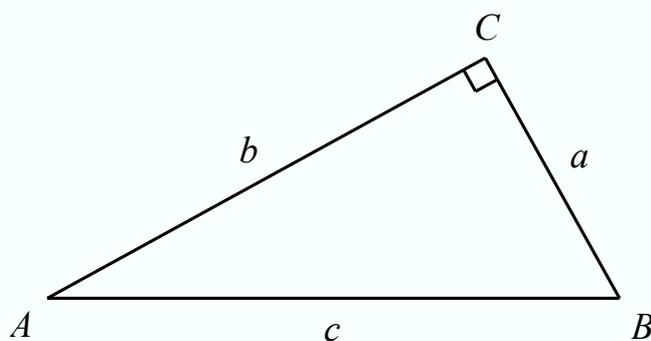
手机扫码看答案

PDF下载



勾股定理是“人类最伟大的十个科学发现之一”，是初等几何中的一个基本定理。勾股定理的别称有很多：毕达哥拉斯定理，商高定理，百牛定理，驴桥定理和埃及三角形等。所谓勾股定理，就是指“在直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方。”

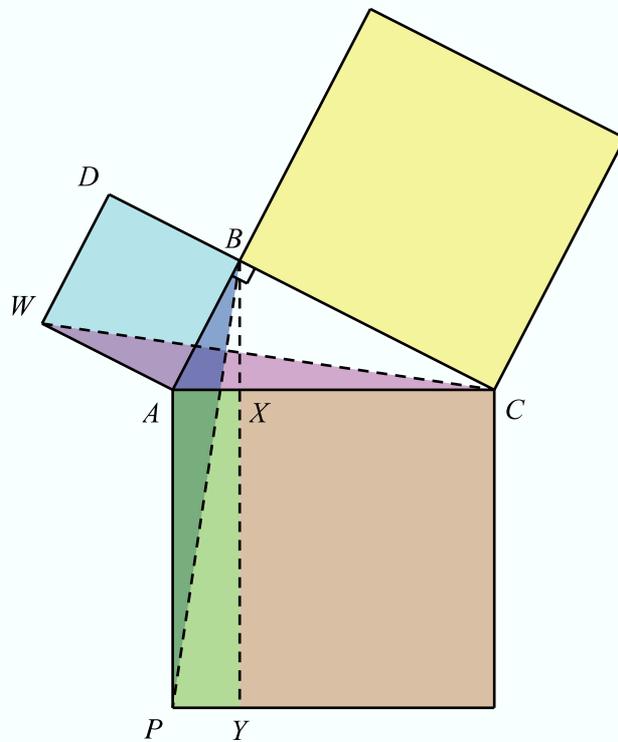
如果直角三角形两直角边长度分别为 a 和 b ，斜边长度为 c ，那么 $a^2 + b^2 = c^2$ 。



这个定理有十分悠久的历史，几乎所有文明古国（希腊、中国、埃及、巴比伦、印度等）对此定理都有所研究。

勾股定理在西方被称为毕达哥拉斯定理，相传是古希腊数学家兼哲学家毕达哥拉斯于公元前550年首先发现的。但毕达哥拉斯对勾股定理的证明方法已经失传。著名的希腊数学家欧几里得在巨著《几何原本》（命题47）中给出一个很好的证明。

欧几里得证法



$$S_{ABDW} = 2S_{\triangle AWC} = 2S_{\triangle ABP} = S_{APYX}$$

中国古代对这一数学定理的发现和应⽤，远⽐毕达哥拉斯早得多。中国最早的一部数学著作——《周髀算经》的开头，记载着一段周公向商高请教数学知识的对话：

周公问：“我听说您对数学非常精通，我想请教一下：天没有梯子可以上去，地也没法用尺子去一段一段丈量，那么怎样才能得到关于天地的数据呢？”

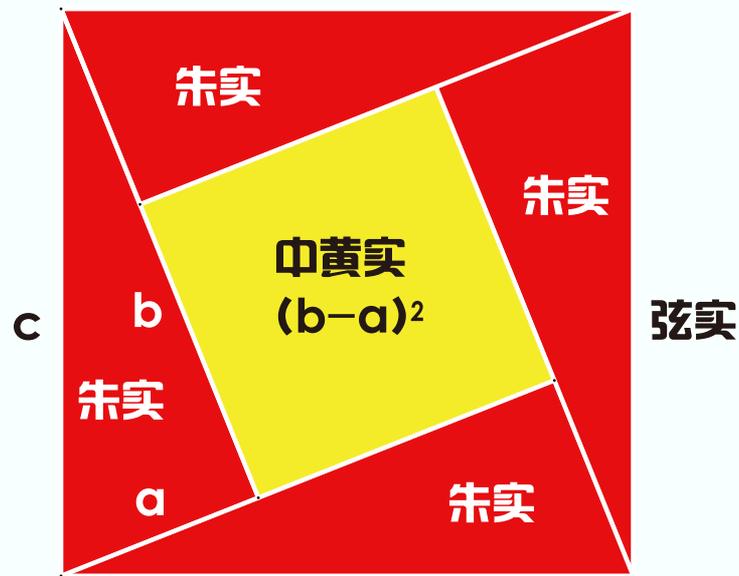
商高回答说：“数的产生来源于对方和圆这些形体的认识。其中有一条原理：当直角三角形‘矩’得到的一条直角边‘勾’等于3，另一条直角边‘股’等于4的时候，那么它的斜边‘弦’就必定是5。”

勾广三，股修四，径隅五

这个原理是大禹在治水的时候就总结出来的。”如果说大禹治水因年代久远⽽无法确切考证的话，那么周公与商高的对话则可以确定在公元前1100年左右的西周时期，⽐毕达哥拉斯要早了五百多年。其中所说的勾3、股4、弦5，正是勾股定理的一个应⽤特例。所以现在数学界把它称为“勾股定理”是非常恰当的。

在稍后一点的《九章算术》一书中（约在公元50至100年间），勾股定理得到了更加规范的一般性表达。书中的《勾股章》说：“把勾和股分别⾃乘，然后把它们的积加起来，再进行开方，便可以得到弦。”中国古代的数学家们不仅很早就发现并应⽤勾股定理，而且很早就尝试对勾股定理作理论的证明。最早对勾股定理进行证明的，是三国时期吴国的数学家赵爽。赵爽创制了一幅“勾股圆⽅图”，⽤形数结合得到方法，给出了勾股定理的详细证明。赵爽的这个证明可谓别具匠⼼，极富创新意识。他⽤几何图形的截、割、拼、补来证明代数式之间的恒等关系，既具严密性，⼜具直观性，为中国古代以形证数、形数统⼀、代数和几何紧密结合、互不可分的独特风格树⽴了一个典范。

赵爽：勾股圆方图

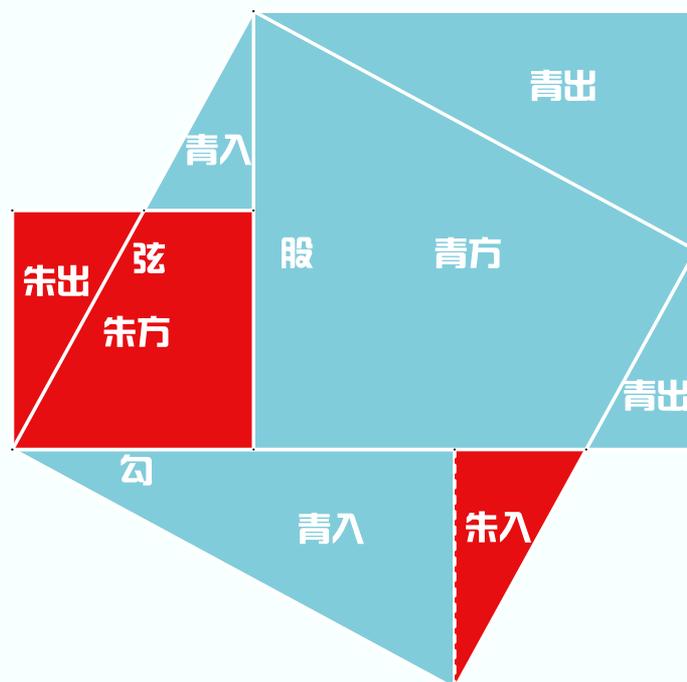


$$\therefore (b-a)^2 + \frac{1}{2}ab \times 4 = c^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

以后的数学家大多继承了这一风格并且有发展，只是具体图形的分合移补略有不同而已。例如稍后一点的刘徽在证明勾股定理时也是用以形证数的方法，中国古代数学家们对于勾股定理的发现和证明，在世界数学史上具有独特的贡献和地位。尤其是其中体现出来的“形数统一”的思想方法，更具有科学创新的重大意义。

刘徽：青出朱入图

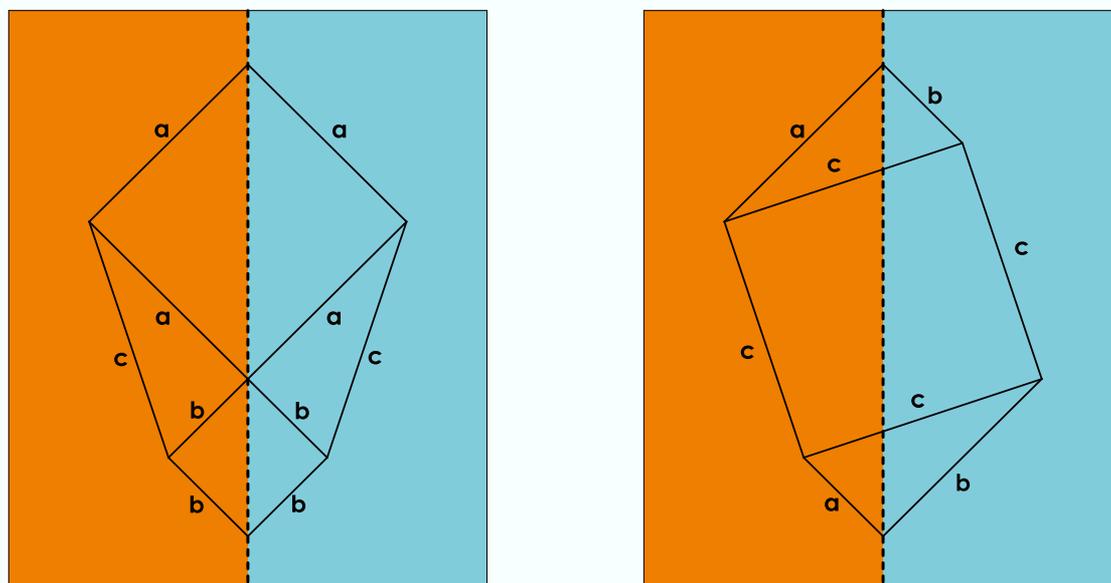


青出=青入，朱出=朱入

实际上，在更早期的人类活动中，人们就已经认识到勾股定理的某些特例。据说古埃及人也曾利用“勾三、股四、弦五”的法则来确定直角。但是，这一传说引起过许多数学史家的怀疑。比如说，美国的数学史家M·克莱因教授曾经指出：“我们也不知道埃及人是否认识到毕达哥拉斯定理。我们知道他们有拉绳人（测量员），但所传他们在绳上打结，把全长分成长度为3、4、5的三段，然后用来形成直角三角形之说，则从未在任何文件上得证实。”不过，考古学家们发现了几块大约完成于公元前2000年左右的古巴比伦的泥板书，据专家们考

证，其中一块上面刻有如下问题：“一根长度为30个单位的棍子直立在墙上，当其 upper 端滑下6个单位时，请问其下端离开墙角有多远？”这是一个三边为3:4:5三角形的特殊例子；专家们还发现，在另一块泥板上刻着一个奇特的数表，表中共刻有四列十五行数字，这是一个勾股数表：最右边一列为从1到15的序号，而左边三列则分别是股、勾、弦的数值，一共记载着15组勾股数。这说明，勾股定理实际上早已进入了人类知识的宝库。

达芬奇证法

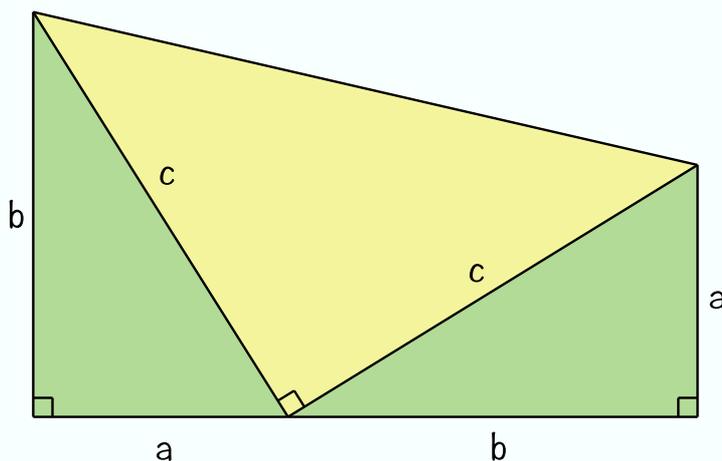


$$\therefore a^2 + b^2 + \frac{1}{2}ab \times 2 = c^2 + \frac{1}{2}ab \times 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

美国总统伽菲尔德证明勾股定理的故事也颇具色彩，1876年一个周末的傍晚，在美国首都华盛顿的郊外，有一位中年人正在散步，欣赏黄昏的美景，他就是当时美国俄亥俄州共和党议员伽菲尔德。他走着走着，突然发现附近的一个小石凳上，有两个小孩正在聚精会神地谈论着什么，时而大声争论，时而小声探讨。由于好奇心驱使，伽菲尔德循声向两个小孩走去，想搞清楚两个小孩到底在干什么。只见一个小男孩正俯着身子用树枝在地上画着一个直角三角形。于是伽菲尔德便问他们在干什么？那个小男孩头也不抬地说：“请问先生，如果直角三角形的两条直角边分别为3和4，那么斜边长为多少呢？”伽菲尔德答道：“是5呀。”小男孩又问道：“如果两条直角边长分别为5和7，那么这个直角三角形的斜边长又是多少？”伽菲尔德不假思索地回答道：“那斜边的平方一定等于5的平方加上7的平方。”小男孩又说：“先生，你能说出其中的道理吗？”伽菲尔德一时语塞，无法解释了，心里很不是滋味。于是，伽菲尔德不再散步，立即回家，潜心探讨小男孩给他出的难题。他经过反复思考与演算，终于弄清了其中的道理，并给出了简洁的证明方法。

总统法



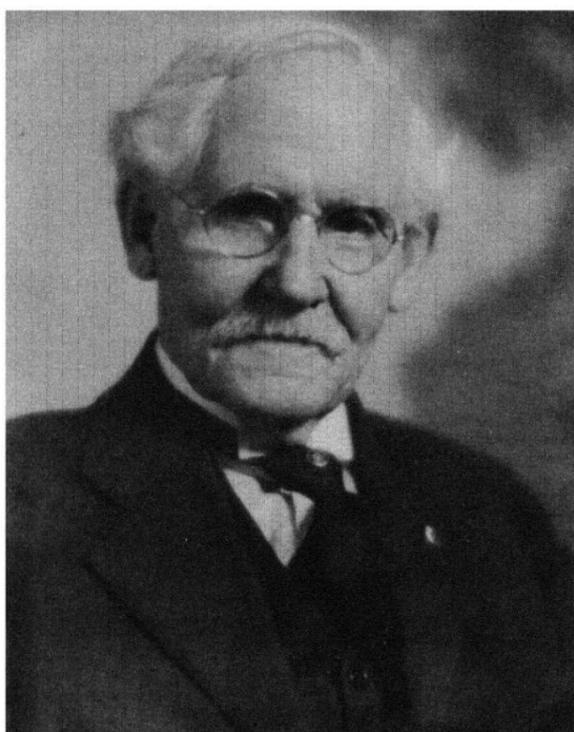
$$\therefore \frac{1}{2}(a+b) \times (a+b) = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}ab \times 2$$

$$\therefore (a+b)^2 = c^2 + 2ab$$

$$\therefore a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

勾股定理迄今为止大约有500种证明方法，是数学定理中证明方法最多的定理之一，国外的Loomis撰写的《The Pythagorean Proposition》一书中搜集了367种不同的证法，不过里面的证法有一些本质上是相同的，个别证法甚至错误



ELISHA S. LOOMIS
Photo 1935

The Pythagorean Proposition

Its Demonstrations Analyzed and Classified

And

Bibliography of Sources

FOR DATA of

The Four Kinds of "Proofs"

SECOND EDITION

1940

By

Elisha S. Loomis, Ph. D., LL. B.

Professor Emeritus of Mathematics
Baldwin-Wallace College

Professor Mathematics, Baldwin University, 1885-1895, Head
of Mathematics Department, West High School,
Cleveland, Ohio, 1895-1923

and

Author of "Original Investigation or How to
Attack an Exercise in Geometry"
(Ginn & Co., 1901)

国内的李迈新编著的《挑战思维极限勾股定理的365种证明》一书，收录了365种不同的证明方式。



勾股定理与高考题：“罪大恶极”的数学家——潘承彪（作者：萨苏）

谈到数学家，有位朋友提起了山东大学老校长潘承洞先生，问我是否了解。老实说，我对潘承洞先生是只闻其名，未见其人。但关于潘先生，倒不是完全没的可说，可以泄漏一个堪称中国数学界“罪大恶极”的秘密。不过，这个“罪大恶极”的主角，并不是潘承洞先生，而是潘承洞先生的弟弟，潘承彪先生。数学界父子传承的不在少数，但兄弟都在这个领域做出出色成就的倒不是特别多，至少我所听说过的，也就是潘先生两兄弟了。这可能是数学这玩意儿太累脑子，对先天要求比较高，家里偶尔出一个干这个的还行，连续放卫星未免要求太高。两位潘先生都在解析数论方面有着出色的成就，堪称双璧。

不过，我要说的并非潘先生的成就，而是他在数学界一个“罪大恶极”的秘密，他干的这件事，相信到现在还有不少人记得，只不过找不着正主儿是谁。

潘先生温文尔雅的人，怎么会做出“罪大恶极”的事情来呢？嘿嘿，这就是教育部的问题了。教育部找了潘先生去出高考题。

中国的高考，习惯是找学科权威来出题的。实际上，我觉得这根本没有道理。因为学科权威的本领在专，在精，对于中学教育那就擀面杖吹火——一窍不通。实证就是科学院数学所的孩子们没一个敢找自己老爹辅导数学的——我们都知道那肯定是越讲越糊涂。

但是，孩子都明白的道理，教育部它不明白！

于是，出高考题，它不找高中的模范教师来做，却找到了潘教授，当然高考出题是很多教授一起来的，潘教授只出了一道题-也还好是只出了一道题。可以想象，刚跟一帮杠头PK完歌德巴赫猜想，忽然让他给小孩子们出题，不出乱子那才怪呢。

那一年，考数学的孩子们都噁了牙花，有愁眉苦脸的，有咬牙切齿的，有目瞪口呆的，有满地找牙的——找了牙准备咬出题的一口。所有的这些学生，都是卡在了潘先生这道题上。这道题答对了的只有不到1%。

是太难么？那倒不是，潘先生算是有自知之明的人，他知道不能拿微分方程折腾孩子们，自己知道不能出这么难的。那出什么好呢？他琢磨着越简单越好吧。就出了一道特别简单的题。

那就是：请叙述并证明勾股定理。

对高考的学生来说，这实在太简单了，就是因为太简单了，根本没有几个学生还记得这东西怎么证。勾股定理么，简直象地球是圆的那么自然么。但是.....证明？这东西还要证明么？！

就是啊，你证明一下地球是圆的吧.....

十年寒窗，苦苦的猜题，弄出来这样一道令人目瞪口呆的东西。下来以后，学生老师没有不骂的 - 这谁呀，出这种题。

那些天，潘先生就总是有些灰溜溜的，对议论高考的人很敏感，而且经常打喷嚏。估计他嘱咐了不少人，所以，至今还时而听到有人印象深刻的提起这道“罪大恶极”，坑了全国99%考生的怪题，却从来没听到谁说得清它的出处。

时隔二十年再揭这个谜底，潘先生应该不会反对了吧。相信当年的学生们也早就想开了——反正。。。大伙儿都挂了，又不是我一个.....

- 作者：邱福星
- 版权：部分题目来自网络，如有侵权，请联系删除

留言区



昵称

必填

邮箱

必填

网址

选填

本站支持上传图片，Latex公式，使用QQ邮箱可以显示头像，欢迎做题！



预览

发送



没有评论

🇨🇳 Copyright © 2020-2021 Designed by QiuFuxing

本站总访问量25455次

鄂ICP备2020019603号-1